数理解析研究所講究録
第 864 巻 1994 年 31-40

Simple Production Planning Model について

愛媛大学工学部 大橋 守 (Mamoru Ohashi)

1 はじめに

ある製品の在庫量に注目して、製品の適正な生産率を決める Production Planning Model を考える。製品の在庫量は需要率と生産率によって決まる微分方程式に従うとする。Thompson and Sethi [7] は製品の需要率が時間の関数として与えられているとき、総費用を最小にする最適な製品の生産率を求めた。製品の需要率が Wiener 過程に従って変化する場合は Bensoussan, Sethi, Vickson and Derzko [2] によって取り扱われている。また、製品の需要率がマルコフ連鎖に従ってランダムに変化する場合は Fleming, Sethi and Soner [3] によって研究されている。Akella and Kumar [1], Ghosh, Arapostathis and Marcus [5] は生産システムの故障や修理を考慮して、生産率に制約がある Production Planning Model を取り扱った。

ここでは、製品の在庫量がランダム・パラメータをもつ線形微分方程式に従うとする。

$$dx(t) = \{A(y(t))x(t) + B(y(t))u(t) - c(y(t))\}dt, \tag{1}$$

$$x(0) = x, \qquad y(0) = i, \qquad u(t) \in K$$

ただし，製品の在庫量を $x(t) \in R^n$，製品の生産率 $u(t) \in R^n$，製品の需要率 $c(y(t)) \in R^n$，$n \times n$ 係数行列 $A(y(t))$，$n \times n$ 係数行列 $B(y(t))$，有界閉凸集合 K，マルコフ連鎖 $\{y(t) : t \geq 0\}$ とする。マルコフ連鎖の状態空間 $S = \{1, 2, ..., s\}$ は有限で生成行列 Λ を

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1s} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{22} & \dots & \lambda_{2s} \\ \dots & & & \\ \lambda_{s1} & \lambda_{s2} & \dots & -\lambda_{ss} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\lambda_{ii} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij} \geq 0$$

とする。このマルコフ連鎖によって，製品の需要や生産システムの故障、修理によるシステムパラメータの変化を表す。入力 $u(t)$ は K の値をとる有界な可測関数とし、この admissible control のクラスを Φ とする。任意の $u \in \Phi$ に対して (1), (2) の解が存在し

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

とおくと， $\{z(t) : t \geq 0\}$ がマルコフ過程になる。今後，記号を簡単にするため $y(t) = i$ のとき $A(y(t))$, $B(y(t))$, $c(y(t))$ を A_i, B_i, c_i と書くことにする。

2 Simple Production Planning Model

この節では需要率に注目して単純化した Production Planning Model を示し、ここで取り扱う Production Planning 問題を定式化する。

2.1 Production Planning Models

(1) Thompson and Sethi のモデル
需要率は時間の関数 $c(t) > 0$ で与えられ、在庫量 $x(t)$ が

$$\frac{d}{dt}x(t) = u(t) - c(t), \qquad x(0) = x$$

に従う。このとき

$$J(u : x) = \int_0^T e^{-\alpha t}\{\frac{h}{2}(x(t) - x_0)^2 + \frac{g}{2}(u(t) - u_0)^2\}dt, \qquad T > 0$$

を最小にする生産率 $u(t) \geq 0$ を決める。ここで、h, g は正の定数、x_0, u_0 は目標の在庫量、生産率とする。

(2) Bensoussan, Sethi, Vickson and Derzko のモデル
需要率は定数 $c > 0$ に white noise $\{w(t)\}$ が加わり、在庫量 $x(t)$ が

$$dx(t) = \{u(t) - c\}dt + \sigma dw(t), \qquad x(0) = x$$

に従う。このとき

$$J(u : x) = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{\frac{h}{2}(x(t) - x_0)^2 + \frac{g}{2}(u(t) - u_0)^2\}dt \mid x(0) = x\right]$$

を最小にする生産率 $u(t) \geq 0$ を決める。ここで、σ, h, g は正の定数、x_0, u_0 は目標の在庫量、生産率とする。

(3) Akella and Kumar のモデル
需要率は定数 $c > 0$ であるが生産システムの故障と修理により生産率が影響を受け、在庫量 $x(t)$ が

$$dx(t) = \{y(t)u(t) - c\}dt, \qquad x(0) = x, \quad y(0) = i$$

に従う。ただし、$u(t) \in K = [0, d]$ (d は正の定数), $y(t) \in S = \{0, 1\}$ とする。$y(t) = 0$ は故障状態、$y(t) = 1$ は正常な状態を表す。このとき

$$J(u : x, i) = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{h^+ x^+(t) + h^- x^-(t)\}dt \mid x(0) = x,\ y(0) = i\right]$$

を最小にする生産率 $u(t)$ を決める。ここで、$x^+(t) = \max\{0, x(t)\}$, $x^-(t) = \max\{0, -x(t)\}$、$h^+$, h^- は正の定数とする。

(4) Ghosh, Arapostathis and Marcus のモデル
需要率は定数 c に white noise $\{w(t)\}$ が加わり、在庫量 $x(t)$ が

$$dx(t) = \{y(t)u(t) - c\}dt + \sigma dw(t), \qquad x(0) = x, \quad y(0) = i$$

に従う。ただし、$u(t) \in K = [0, d]$, $y(t) \in S = \{0, 1\}$ とする。このとき

$$J(u : x, i) = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} h(x(t))dt \mid x(0) = x,\ y(0) = i\right]$$

を最小にする生産率 $u(t)$ を決める。ここで、σ は正の定数、$h(x)$ は単位時間当たりの在庫費用とする。

(5) Fleming, Sethi and Soner のモデル
需要率はマルコフ連鎖によって変わり、在庫量 $x(t)$ が

$$dx(t) = \{u(t) - c(y(t))\}dt, \qquad x(0) = x, \quad y(0) = i$$

に従う。ただし、$u(t) \geq 0$, $y(t) \in S = \{1, 2, \cdot, n\}$ とする。このとき

$$J(u : x, i) = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{h(x(t)) + g(u(t))\}dt \mid x(0) = x,\ y(0) = i\right]$$

を最小にする生産率 $u(t)$ を決める。ここで、$h(x)$, $g(x)$ は単位時間当たりの在庫費用、生産費用とする。

2.2 モデルの定式

ある製品の需要率と生産システムの故障と修理により、システムパラメータがマルコフ連鎖によって変わり、在庫量 $x(t)$ が

$$dx(t) = \{A(y(t))x(t) + B(y(t))u(t) - c(y(t))\}dt, \qquad x(0) = x, \quad y(0) = i$$

に従うとする。ただし、$u(t) \in K$ で、K は 0 を含む有界閉凸集合とする。このとき

$$J(u : x, i) = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{h(x(t)) + g(u(t))\}dt \mid x(0) = x,\ y(0) = i\right] \tag{3}$$

を最小にする生産率 $u(t)$ を決める Production Planning 問題を取り扱う。ただし、$h(x)$, $g(x)$ は単位時間当たりの在庫費用、生産費用とする。

ここでは以下の仮定のもとで Production Planning 問題を考察する。

仮定 (i) 在庫費用 $h(x)$ は R^n の凸関数で、正の定数 k_1, k_2 に対して

$$-k_1 \le h(x) \le k_2(1 + |x|^2)$$

とする。

(ii) 生産費用 $g(u)$ は K の狭義凸関数とする。

(iii) それぞれの $i \in S$ に対して $B_i \ge 0, c_i > 0$ とする。

最適費用関数を

$$v(x, i) = \inf_{u \in \Phi} J(u : x, i) \tag{4}$$

とし、

$$v(x, i) = J(u^* : x, i)$$

となる $u^* \in \Phi$ を最適生産方策と言う。

3 最適方策

ランダム・パラメータをもつ線形システム (1), (2) において，$u(t) = c(y(t)) = 0$ の場合，すなわち，線形システム

$$dx(t) = A(y(t))x(t)dt, \tag{5}$$

$$x(0) = x, \qquad y(0) = i$$

について安定性を定義する。

定義 1 (stochastically stable)

ランダム・パラメータをもつ線形システム (2), (5) の状態 $x(t)$ が

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}[\int_0^T \mid x(t) \mid^2 dt \ \mid \ x(0)=x,\ y(0)=i] < \infty \tag{6}$$

であるとき，線形システム A は stochastically stable という。

補題 1 線形システム A が stochastically stable ならば、それぞれの $i \in S$ に対して

$$(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I)'P_i + P_i(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I) + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}P_j + I = 0 \tag{7}$$

となる対称正定行列 $P_i,\ i \in S$ が存在する。

[証明] [8] を見よ。 ||

線形システム A が stochastically stable であるとき、最適費用関数 $v(x,i)$ の性質を次に示す。

補題 2 線形システム A が stochastically stable ならば、それぞれの $i \in S$ に対して $v(x,i)$ は凸関数で

$$-k \leq v(x,i) \leq k(1+\mid x \mid^2) \tag{8}$$

となる正の定数 k が存在する。

[証明] 初めに、それぞれの $i \in S$ に対して $v(x,i)$ が凸関数であることを示す。任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$v(x_l,i) + \epsilon > J(u_l : x_l, i), \qquad l = 1,2$$

となる $u_l \in \Phi$ を選ぶ。また、任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \qquad u = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$$

とおくと

$$\lambda v(x_1,i) + (1-\lambda)v(x_2,i) + \epsilon > \lambda J(u_1 : x_1, i) + (1-\lambda)J(u_2 : x_2, i)$$

仮定より $h(x)$, $g(u)$ は凸関数であるから (1), (3) 式を用いると

$$\lambda J(u_1 : x_1, i) + (1-\lambda)J(u_2 : x_2, i) > J(u : x, i)$$

となる。上式の右辺は $v(x,i)$ の定義より $J(u : x,i) \geq v(x,i)$ であるから

$$\lambda v(x_1,i)+(1-\lambda)v(x_2,i)+\epsilon > v(x,i)$$

よって、$v(x,i)$ は凸関数となる。

次に、不等式 (8) を示す。K が有界であるから、仮定 (i) の不等式より $-k \le v(x,i)$ を得る。$\tilde{A}$ をマルコフ過程 $\{z(t)\}$ の weak infinitesimal operator とすると、補題 1 の対称正定行列 $P_i,\ \ i \in S$ に対して

$$\tilde{A}(x'P_ix) = x'\{(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I)'P_i + P_i(A_i - \frac{1}{2}\lambda_{ii}I) + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}P_j\}x$$
$$+(B_iu-c_i)'P_ix + x'P_i(B_iu-c_i)$$

となる。(7) より

$$\tilde{A}(x'P_ix) = -|x|^2 + (B_iu-c_i)'P_ix + x'P_i(B_iu-c_i)$$

K は有界集合、S は有限集合であるから $\tilde{A}(x'P_ix) \le d_1$ となる定数 d_1 が存在する。Dynkin の公式より

$$\mathbf{E}[\,x'(t)P(y(t))x(t)\ \ |\ x(0)=x,\ y(0)=i\,] \le x'P_ix + d_1t$$

となる。$P_i,\ i\in S$ が対称正定行列であるから適当に定数 d_2 を選ぶと

$$\mathbf{E}[\,|\ x(t)\ |^2\ |\ x(0)=x,\ y(0)=i\,] \le d_2\ |\ x\ |^2\ (1+t)$$

と書ける。仮定より $h(x) \le k_2(1+|x|^2)$ で $g(u)$ は有界であるから $v(x,i) \le k(1+\ |\ x\ |^2)$ となる定数 k が存在する。 ||

この最適化問題に関係したダイナミック・プログラミングの方程式は

$$\alpha v(x,i) + H(x,i,\nabla v(x,i)) - Lv(x,i) = 0, \qquad x \in R^n, \quad i \in S \tag{9}$$

となる。ただし、

$$H(x,i,r) = -\inf_{u\in K}[\,h(x)+g(u)+(A_ix+B_iu-c_i)\cdot r\,] \tag{10}$$

$$Lv(x,i) = \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}[\,v(x,j)-v(x,i)\,] \tag{11}$$

とする。

補題 3 (verification theorem)

ダイナミック・プログラミング方程式 (9) の解 $v(x,i)$ が

(i) それぞれの $i \in S$ に対して $v(x,i)$ が凸関数で、$-k \le v(x,i) \le k(1+\ |\ x\ |^2)$

(ii) それぞれの $i \in S$ に対して $\nabla v(x,i)$ が連続

ならば、

(a) 任意の $u \in \Phi$ に対して $v(x,y) \le J(u:x,y)$

(b)

$$H(x^*(t), y(t), \nabla v(x^*(t), y(t))) = -h(x^*(t)) + g(u^*(t))$$
$$-\{A(y(t))x^*(t) + B(y(t))u^*(t) - c(y(t)))\} \cdot \nabla v(x^*(t), y(t)) \quad a.e.$$

となる $u^* \in \Phi$, 方程式 (1) の解 x^* が存在するとき、$v(x,i) = J(u^*:x,i)$ となる。

[証明] [4] を見よ。 ‖

ダイナミック・プログラミング方程式 (9) の連続な解 $v(x,i)$ について次の定義を行う。

定義 2 (viscosity solution)
$v(x,i)$ を連続関数とする。それぞれの (x,i) に対して凸集合 $D_x^+(x,i), D_x^-(x,i)$ を次のように定義する。

$$D_x^+(x,i) = \{r \in R^n : \limsup_{h\to 0}(v(x+h,i) - v(x,i) - r\cdot h) \mid h \mid^{-1} \le 0\},$$

$$D_x^-(x,i) = \{r \in R^n : \liminf_{h\to 0}(v(x+h,i) - v(x,i) - r\cdot h) \mid h \mid^{-1} \ge 0\}$$

このとき、連続関数 $v(x,i)$ がそれぞれの (x,i) に対して

$$\alpha v(x,i) + H(x,i,r) - Lv(x,i) \le 0, \qquad r \in D_x^+(x,i)$$

$$\alpha v(x,i) + H(x,i,r) - Lv(x,i) \ge 0, \qquad r \in D_x^-(x,i)$$

となるとき、ダイナミック・プログラミング方程式 (9) の viscosity solution と言う。

補題 4 $v(x,i)$ が viscosity solution で凸関数ならば、それぞれの $i \in S$ に対して $\nabla v(x,i)$ は存在し、連続となる。

[証明] viscosity solution $v(x,i)$ が凸関数であるから $D_x^- v(x,i)$ がただ一つの要素しか持たないことを示せば十分である。$v(x,i)$ が x_n で微分可能ならば (9) 式は

$$\alpha v(x_n,i) + H(x_n,i,\nabla v(x_n,i)) - Lv(x_n,i) = 0$$

となる。$v(x,i)$ が連続で凸関数であるから $x_n \to x$ とすると

$$\alpha v(x,i) + H(x,i,r) - Lv(x,i) = 0, \qquad r \in \Gamma(x,i)$$

と書ける。ただし、

$$\Gamma(x,i) = \{r = \lim_{n\to 0} \nabla v(x_n, i) : x_n \to x;\ v(x,i) \text{ は } x_n \text{で微分可能} \}$$

とする。さらに、

$$H(x,i,r) = -\inf_{u\in K}\{g(u) + B_i u \cdot r\} - h(x) - (A_i x - c_i)\cdot r$$

は r に関して凸関数である。$\Gamma(x,i)$ の凸包は $D_x^- v(x,i)$ と一致するから

$$\alpha v(x,i) + H(x,i,r) - Lv(x,i) \le 0, \qquad r \in D_x^- v(x,i)$$

となる。しかし、$v(x,i)$ が viscosity solution より

$$\alpha v(x,i) + H(x,i,r) - Lv(x,i) \ge 0, \qquad r \in D_x^- v(x,i)$$

であるから

$$\alpha v(x,i) + H(x,i,r) - Lv(x,i) = 0, \qquad r \in D_x^- v(x,i)$$

となる。$H(x,i,r)$ が凸集合 $D_x^- v(x,i)$ 上で r に関して定数となるから仮定より凸集合 $D_x^- v(x,i)$ はただ一つの要素しか持たない。 ‖

補題 5 $v(x,i)$ は viscosity solution となる。

[証明] [3] を見よ。 ‖

定理 1 線形システム A が stochastically stable ならば、それぞれの $i \in S$ に対して

$$u^*(x,i) = \arg\min_{u\in K}[\, g(u) + B_i u \cdot \nabla v(x,i)\,] \tag{12}$$

は連続となる。

[証明] 補題2、4、5 より $\nabla v(x,i)$ は x に関して連続となる。仮定 (ii) より

$$g(u) + B_i u \cdot \nabla v(x,i)$$

の最小点 $u^*(x,i)$ はただ 1 つ存在し、x に関して連続となる。 ‖

定理 2 線形システム A が stochastically stable で、$u^* \in \Phi$ に対する方程式 (1) の解が一意に存在するならば、u^* が最適生産方策となる。

[証明] 補題3と定理1より結果を得る。 ‖

次に (12) 式で決まる u^* に対する方程式 (1) の解が一意に存在する例を示す。一次元の場合を考え、

$$g(u) = u^2, \qquad K = [0, d]$$

とする。このとき、(1) 式は

$$dx(t) = \{A(y(t))x(t) + B(y(t))u^*(x(t), y(t)) - c(y(t))\}dt,$$

$$x(0) = x, \qquad y(0) = i$$

(12) 式は

$$\begin{aligned} u^*(x,i) &= \arg\min_{u\in[0,\,d]}[\,|u|^2 + B_i u \nabla v(x,i)\,] \\ &= \begin{cases} 0 & \nabla v(x,i) \geq 0 \\ \min\{-B_i \nabla v(x,i),\ d\} & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。マルコフ連鎖 $\{y(t):\ t \geq 0\}$ が時刻 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ で状態変化が起ったとする。それぞれの $i \in S$ に対して、微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_i x(t) + B_i u(x(t), i) - c_i, \qquad t_{l-1} < t \leq t_l$$

$$x(t_{l-1}) = x_{l-1}, \qquad l = 1, 2, \cdots$$

を考える。これは

$$\frac{d}{dt}[\exp\{-A_i(t - t_{l-1})\}x(t)\,] = \exp\{-A_i(t - t_{l-1})\}[\,B_i u^*(x(t), i) - c_i\,]$$

となる。定理1と補題2より $u^*(x,i)$ は連続で非増加関数であるから [6] より解が一意に存在する。

参考文献

[1] R. Akella and P. R. Kumar, *Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system*, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-31**(1986), pp.116-126.

[2] A. Bensoussan, S. P. Sethi, R. Vickson and N. Derzko, *Stochastic production planning with production constraints*, SIAM J. Control and Optim., **22**(1984), pp.920-935.

[3] W. H. Fleming, S. P. Sethi and H. M. Soner, *An optimal stochastic produ tion planning problem with randomly fluctuating demand*, SIAM J. Control ar Optim., **25**(1987), pp.1494-1502.

[4] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosi Solutions*, Springer-Verlag, 1993.

[5] M. K. Ghosh, A.Arapostathis and S. I. Marcus, *Optimal control of switchi diffusions with application to flexible manufacturing systems*, SIAM J. Contr and Optim., **31**(1993), pp.1183-1204.

[6] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley, 1964.

[7] G. L. Thompson and S. P. Sethi, *Turnpike horizons for production plannin* Management Sci., **26**(1980), pp.229-241.

[8] 大橋　守, *On Markovian jump linear systems*, 数理解析研究所講究録, **835**(199 pp. 173-180.